

Szinuszos oszcillátor amplitúdó- és fáziszajának meghatározása

LADVÁNSZKY JÁNOS, KOVÁCS GÁBOR

Ericsson R&D

janos.ladvanszky, gabor.g.kovacs@ericsson.com

Lektorált

Kulcsszavak: Jelfeldolgozás, zaj, kvadratúra demoduláció, zajszoknya

A Matlab program felhasználásával amplitúdó- és fáziszajt nyerünk ki szinuszos oszcillátor mért időtartománybeli kimeneti jeléből. Megvizsgálva a meghatározott zajok auto- és keresztkorrelációját, megtudjuk, hogyan kell az oszcillátor zaját modellezni. Bebizonyítjuk, hogy a zajszoknya oka a korreláció, nem pedig a fáziszaj, ahogyan széles körben elterjedt. Rámutatunk, hogy munkánk az ergodikus hipotézis érvényességére is bizonyítékot nyújt.

1. Bevezetés

A fáziszaj a kommunikációs rendszerek tulajdonságait jelentősen befolyásolja. A legtöbb, ezzel foglalkozó szakcikk [1-4] a fáziszaj spektrumát néhány mérés alapján próbálja közelíteni, ezért az érvényességi körük korlátozott. Néhány további cikk szigorú elméleti alapokon nyugszik és így valódi megértést tesz lehetővé [5-7]. Rendszertervezési célokra az általában alkalmazott közelítések (például az, hogy a rendszer vezérosszcillátorában csak fáziszajt tételezünk fel, az amplitúdószajt elhanyagoljuk) nem elégségesek. Ahhoz, hogy precízen modellezzük egy oszcillátor zajának hatását a rendszer paramétereire, a zaj tulajdonságainak pontos ismeretére van szükség.

Ebben a cikkben egyszerű módszert adunk meg szinuszos oszcillátorok zajának pontos meghatározására. Kísérleti adatok alapján rámutatunk, hogy egy valódi oszcillátor jele mindig tartalmaz mind amplitúdó-, mind pedig fáziszajt, melyek jelentősen auto- és keresztkorreláltak. Ideális, zajmentes fáziszárt hurok Matlab szimulációjával a mért oszcillátorjel frekvenciáját pontosan meg tudjuk határozni. Az amplitúdó és a frekvencia ismeretében, és a kvadratúra demoduláció ismert elvét felhasználva, kinyerjük az oszcillátor amplitúdó- és fáziszaját az időtartományban. Az auto- és keresztkorrelációt és a hozzájuk tartozó teljesítmény-spektrumokat szintén meghatározzuk.

Cikkünkben az az újdonság, hogy a kvadratúra demodulációt szokatlan módon alkalmazzuk. Az amplitúdó- és fáziszajt modulációnak tekintjük és felhasználjuk azt, hogy a Matlab-ban zajmentes fáziszárt hurkot tudunk szimulálni.

Munkánk második szakaszában részletesen leírjuk az eljárást. A következő szakaszban a pontosságot vizsgáljuk, szimulált bemeneti adatok alapján. A negyedik szakaszban közöljük mérési eredményeinket, meghatározzuk az auto- és kereszt-korrelációt és a spektrumokat. Az ezt követő *I. Függelékben* rámutatunk, hogy nem tudjuk az amplitúdó- és fáziszajt a korreláció vagy

a spektrum tulajdonságai alapján elkülöníteni. A *II. Függelékben* bebizonyítjuk, hogy a zajszoknya oka a korreláció, nem pedig a fáziszaj, ahogyan ez jelenleg széles körben elterjedt. A *III. Függelékben* előző eredményeinket igazoljuk szimulációval, az ergodikus hipotézis alkalmazása nélkül, és ezzel a hipotézis helyességét támasztjuk alá.

2. A zaj meghatározásának algoritmus

Szinuszos jelet vizsgálunk, amplitúdó- és fáziszajjal:

$$v(t) = A(1 + \xi(t)) \cdot \cos(\omega_c t + \varphi(t)) \quad (1)$$

ahol $\varphi(t)$ és $\xi(t)$ jelöli a fázis- és a relatív amplitúdószajt. Mindkettő dimenzió nélküli. Feltételezzük, hogy a várható értékük nulla:

$$\mu_\xi = E[\xi(t)] = 0 \quad (2)$$

$$\mu_\varphi = E[\varphi(t)] = 0 \quad (3)$$

és azt, hogy a varianciájuk, σ_ξ^2 és σ_φ^2 szintén nem függ az időtől:

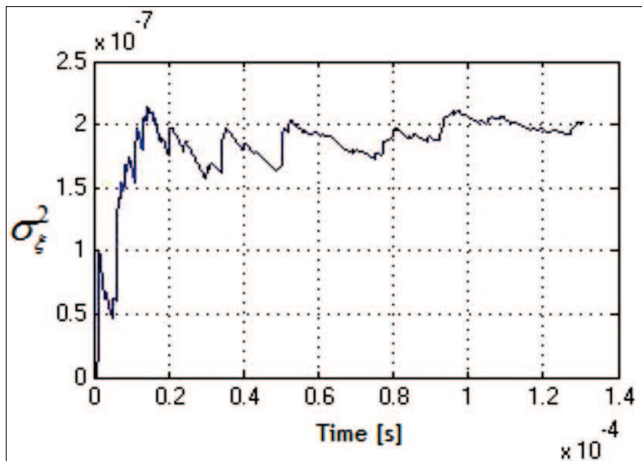
$$\sigma_\xi^2 = E[\xi^2(t)] \quad (4)$$

$$\sigma_\varphi^2 = E[\varphi^2(t)] \quad (5)$$

Feltételezzük, hogy az itt felmerülő minden $f(t)$ kvázi-periodikus jel ergodikus (itt ez azt jelenti, hogy középértékben ergodikus, [8]):

$$E[f(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c t}^{\omega_c t + 2\pi} f(t') d\omega_c t' \quad (6)$$

Tudjuk, hogy $v(t)$ szigorú matematikai értelemben nem ergodikus (kivéve, ha az átlagolás időtartama a harmonikus komponens periódusidejének egész számú többszöröse), mert a tetszőleges, hosszú időre vett időátlag különbözhet a várható értéktől. Azonban mérnöki intuíciónk alapján a továbbiakban feltételezzük, hogy (6) fennáll. Ezt az utat követjük, és a periódusra vett időátlagot alkalmazzuk mint várható értéket.



1. ábra A detektált amplitúdó zaj σ_{ξ}^2 varianciája, amelynek nullának kellene lennie ebben a példában.

Ez az ábra a numerikus hibát mutatja.

Vízszintes tengely: az idő másodpercben, függőleges tengely: σ_{ξ}^2 . Mivel csak fáziszajt alkalmaztunk, $\sigma_{\xi}^2 \ll \sigma_{\varphi}^2$.

Az (1) egyenlet alapján

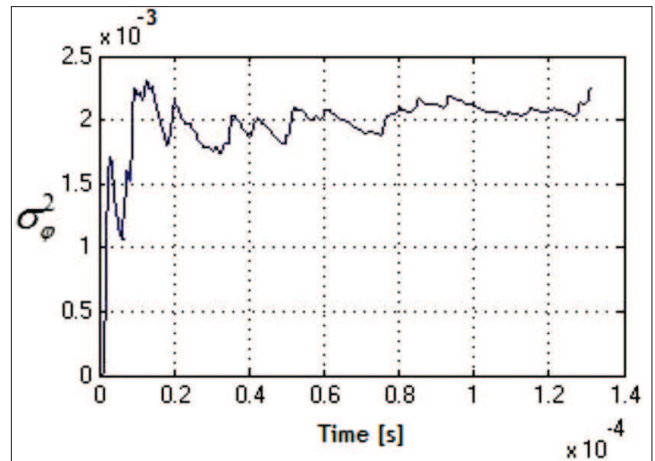
$$\begin{aligned} v(t) &= A(1 + \xi(t))[\cos \varphi(t) \cos \omega_c t - \sin \varphi(t) \sin \omega_c t] \\ &= \alpha(t) \cos \omega_c t + \beta(t) \sin \omega_c t \end{aligned} \quad (7)$$

A mért $v(t)$ alapján pontosan meg tudjuk határozni A és ω_c értékét. Ezután a zajmentes $\cos(\omega_c t)$ és $\sin(\omega_c t)$ jelet szimuláljuk. A $v(t)$ jelet ezekkel megszorozva és a periódusra integrálva, megkapjuk $\alpha(t)/2$ és $\beta(t)/2$ értékét. Ebből

$$1 + \xi(t) = \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{A} \quad (8)$$

$$\tan \varphi(t) = -\frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \quad (9)$$

Fel szeretnénk hívni a figyelmet, hogy (8) és (9) felírásában csak azt a közelítést alkalmaztuk, hogy a zajok a periodikus jelhez képest lassú folyamatok. Ezért a vázolt algoritmus várhatóan nagyon pontos. A pontosságot vizsgáljuk a következő szakaszban.



2. ábra A detektált fáziszaj σ_{φ}^2 varianciája

Vízszintes tengely: az idő másodpercben, függőleges tengely: σ_{φ}^2 . A görbe jól közelíti az előzőleg megadott $2 \cdot 10^{-3}$ értékhez.

A relatív pontosság körülbelül 10^{-4} .

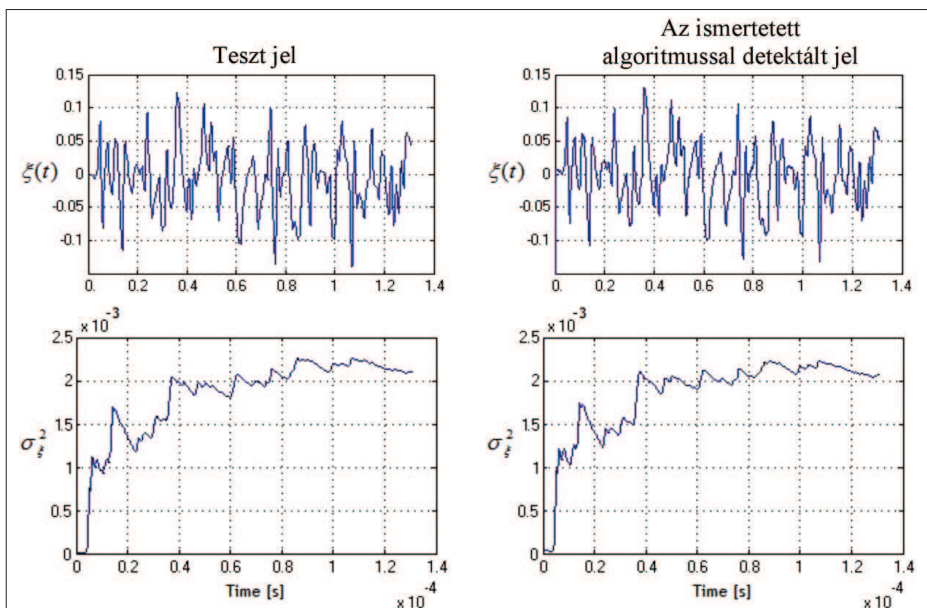
3. Az algoritmus pontosságának vizsgálata

Az utóbbi néhány műveletet Matlab/Simulink programmal végezzük el. Ebben a szakaszban az algoritmust teszteljük szimulált tesztjelek segítségével. Az első szimulált jel csak gaussi fáziszajt tartalmaz, $\sigma_{\varphi}^2 = 2 \cdot 10^{-3}$ (az (1) egyenlet következtében a variancia dimenzió nélküli). Az eredmények az 1. és 2. ábrán láthatók.

A következő példában algoritmusunkat olyan szinuszejre alkalmazzuk, amely egyidejű, egymástól független, gaussi amplitúdó- és fáziszajt tartalmaz. A varianciák rendre $2 \cdot 10^{-3}$ és $4 \cdot 10^{-4}$. A 3. és 4. ábra mutatja, hogy a bemenő és kimenő jelek közti egyezés nagyon jó.

4. Mérési eredmények

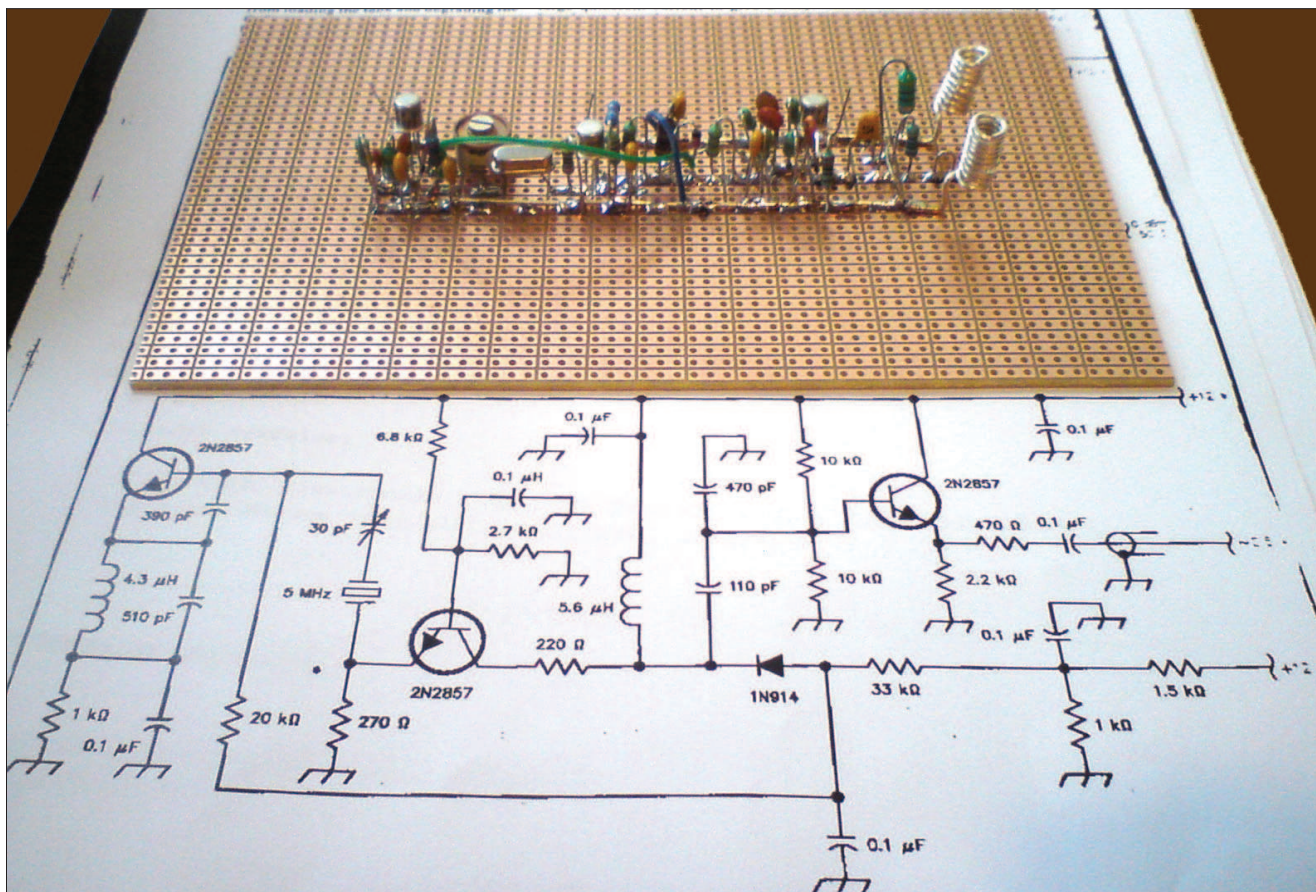
Ebben a szakaszban azt mutatjuk be, hogyan alkalmaztuk az algoritmust mért adatokra.



3. ábra

A bemenő és a kinyert amplitúdó-zaj összehasonlítása

A σ_{ξ}^2 variancia nem függ az időtől, az ábra azt mutatja, hogy a Simulink hogyan közelítette az idő függvényében.



5. ábra A próbapanelen megépített oszcillátor

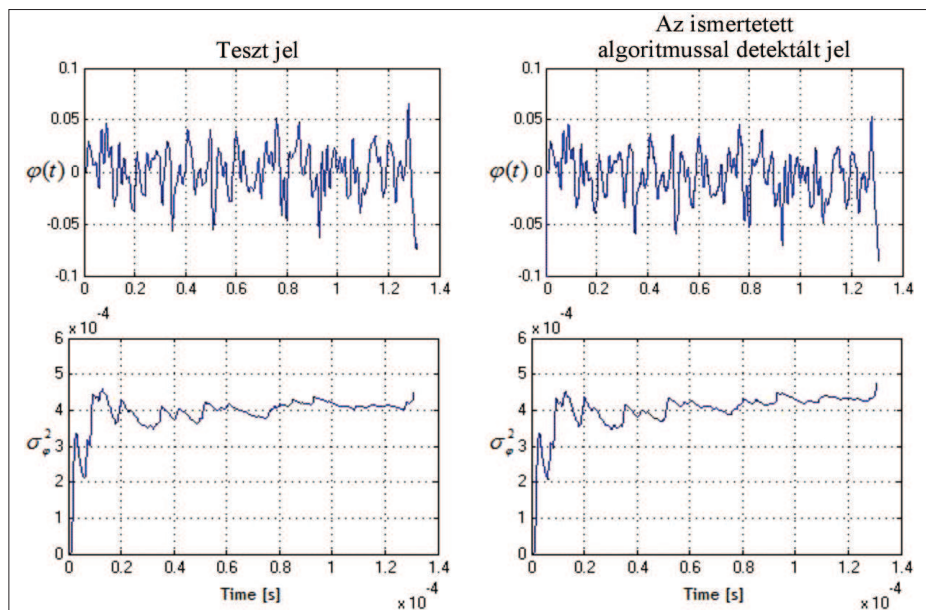
10 MHz-es kvarcoszcillátort építettünk [9] (5. ábra).

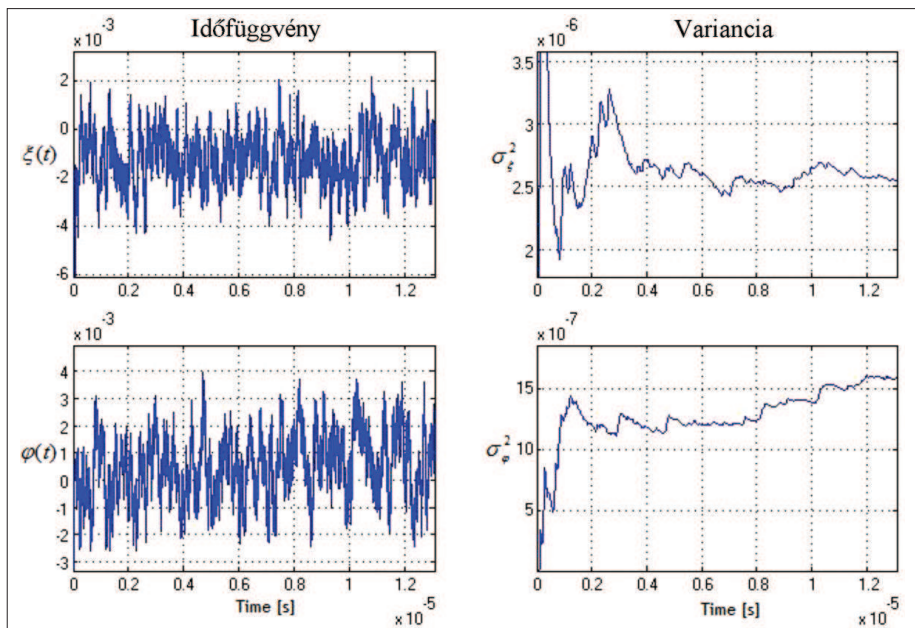
A kimeneti jelet Agilent 54854A típusú oszcilloszkóppal mértük (40 GS/sec opció). A minták száma 524287 volt, a lehető legnagyobb, az időlépés 25 psec. Az amplitúdót a $v(t)$ jel lehető legtöbb teljes periódusra vett varianciájából határoztuk meg. A vivőfrekvencia meghatározásához szimulált, zajmentes fáziszárt hurkot használtunk fel, és a VCO frekvenciát mértük. A fáziszárt hurrok sávszélessége 100 kHz volt, nem kritikus, a sávszé-

lesség 30-300 kHz-es tartományában a VCO frekvencia csak 260 Hz-et változott. A kinyert amplitúdó- és fáziszaj a 6. ábrán látható. A varianciák rendre $2.5 \cdot 10^{-6}$ és $1.5 \cdot 10^{-6}$.

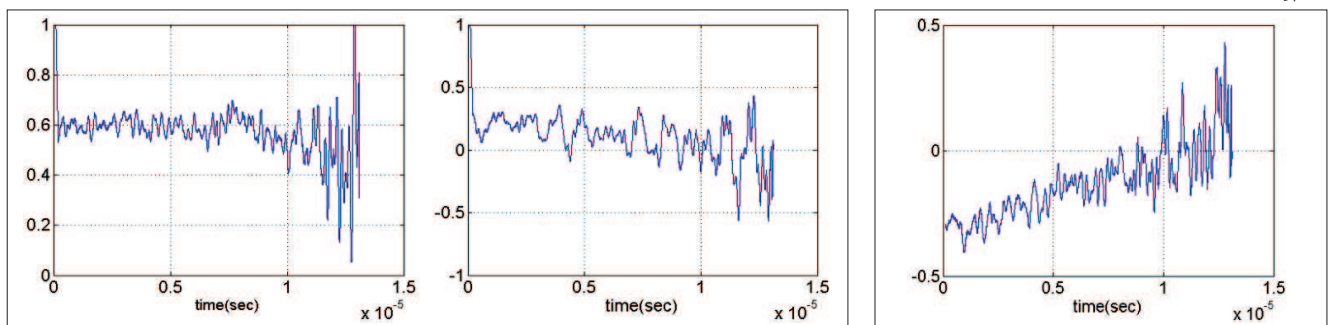
Az amplitúdózaj sokkal erősebben korrelált, mint a fáziszaj (7. ábra). A távoli autokorreláció-értékek esetén megnövekszik a mérési hiba. A hosszú idejű korreláció az $1/f$ zaj jellemzője, ezért várható, hogy az amplitúdózaj jelentős $1/f$ összetevőt tartalmaz.

4. ábra
A bemenő és a kinyert
fáziszaj összehasonlítása.
A σ_{φ}^2 variancia nem függ az időtől,
az ábra azt mutatja, hogy a Simulink
hogyan közelítette az idő függvényében





6. ábra
Az épített kvarcoszcillátorral mért
eredmények:
a kinyert amplitúdó és fáziszaj



7. ábra
Az amplitúdó- és fáziszaj auto-korrelációja, szűrés nélkül

A 8. ábra szerint az amplitúdó- és fáziszaj keresztkorrelációja jelentős, ahogy vártuk. Ennek az az oka, hogy az amplitúdó- és a fáziszaj ugyanabból a zajforrásból származik, az áramköri nemlinearitások AM-PM konverziójának segítségével.

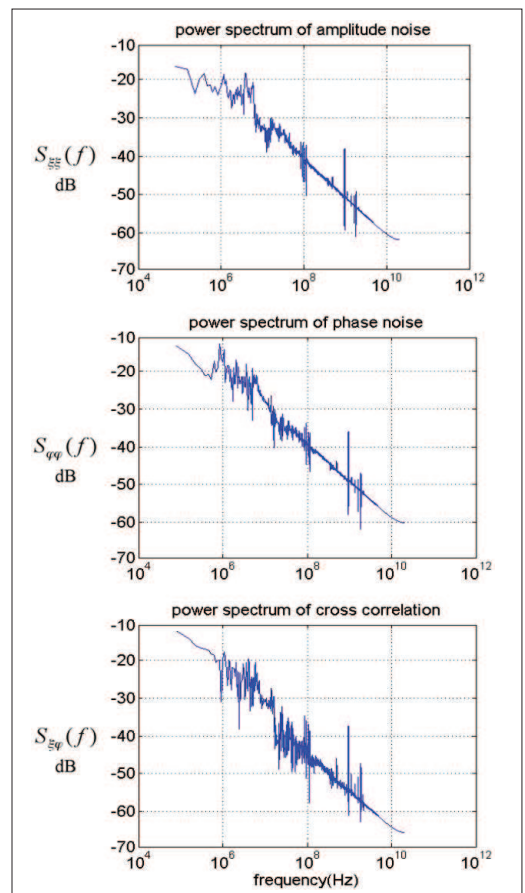
Végül közöljük a kinyert zajok auto- és keresztkorrelációjának gyors Fourier-transzformáltját is, melyeken jól látszik az $1/f$ zajszszetevő.

5. Következtetések

Mért adatok alapján sikeresen határoztuk meg az amplitúdó- és fáziszajt, kvadratúra demoduláció segítségével. A meghatározott amplitúdózaj sokkal erősebben korrelált, mint a fáziszaj, és a kettő közti keresztkorreláció is jelentős. Megmutattuk, hogy korrelálatlan zaj esetén nincs zajsoknya. Az eredmények gyakorlati értéke az, hogy megtudtuk, hogyan kell a zajt modellezni rendszeranalízis számára: Figyelembe kell venni mind az amplitúdó-, mind a fáziszajt, melyeknek jelentősen auto- és keresztkorreláltaknak kell lenniük.

Ennek a munkának a folytatásaként tervezzük az algoritmusunk részletes összehasonlítását más, kísérleti módszerekkel.

5. ábra
A teljesítményspektrumok



Köszönetnyilvánítás

A szerzők hálása az Ericsson R&D vezetőinek és a kollégáknak a kiváló kutatási feltételekért. Külön köszönet illeti Vámos Ábel urat a publikációs engedély megszerzéséért, Dr. Yinggang Li urat, aki vállalta az első kritikus felelősségét, Berceli Tibor, Lajtha György, Kollár István professzor urakat és Dr. Mihály Zsigmond urat az első változat átnézésakor tett megjegyzéseikért.

A szerzőkről



LADVÁNSZKY JÁNOS a BME-n szerzett okleveles villamosmérnöki diplomát (1978), majd a Magyar Tudományos Akadémián a műszaki tudomány kandidátusa címet (1988). A Távközlési Kutató Intézetben, majd jogutódjánál dolgozott 22 évig (mikrohullámú eszközök mérés technikája és modellezése, mikrohullámú áramkörök tervezése), ezután az Austriamicrosystems AG-nél 10 évig (rendszertervezés ASIC-hez). Jelenleg az Ericsson R&D-nél rendszermérnök. Szakterülete az elektronikus áramkörök és rendszerek elmélete, főként mikrohullámú alkalmazásokkal.



KOVÁCS GÁBOR a BME-n szerzett okleveles villamosmérnöki diplomát (2003) és a Drexel Egyetemen (Philadelphia, USA) PhD fokozatot (2009). Az egyetem Villamosmérnöki és Informatikai Karán 2007 óta tanít. Ezalatt főként száloptikai átviteli rendszerekkel és optikai-mikrohullámú átvittel foglalkozott, de tapasztalatai kiterjednek FPGA jelfeldolgozás alkalmazására és szilárdtest lézer alapú mikrohullámú jelgenerálás területére is. Jelenleg a budapesti Ericsson R&D-nél rendszermérnök.

FÜGGELÉKEK

I. A kimeneti jel auto-korrelációja

Az oszcillátor komplex kimeneti feszültsége:

$$V(t) = A(1 + \xi(t)) \exp(j[\omega_c t + \varphi(t)]) \quad (10)$$

$$v(t) = \text{Re}(V(t)) \quad (11)$$

A kimeneti feszültség autokorreláció-függvénye

$$R_{VV}(\tau) = \frac{E[V^*(t)V(t+\tau)]}{\sigma_V^2} \quad (12)$$

ahol a csillag konjugálást jelöl és kihasználtuk, hogy a várható érték nulla:

$$\mu_V = 0 \quad (13)$$

Feltételezzük, hogy a fáziszaj kicsi:

$$\varphi(t) \ll 1 \quad (14)$$

$$\exp(j\varphi(t)) \approx 1 + j\varphi(t) \quad (15)$$

Ezzel a kimeneti feszültség:

$$V(t) = A(1 + \xi(t))(1 + j\varphi(t)) \exp(j\omega_c t) \quad (16)$$

A másodrendűen kicsi tagot elhanyagoljuk:

$$V(t) = A(1 + \xi(t) + j\varphi(t)) \exp(j\omega_c t) \quad (17)$$

A (6) alkalmazásával a komplex kimeneti feszültség varianciája:

$$\sigma_V^2 = A^2(1 + \sigma_\xi^2 + \sigma_\varphi^2) \quad (18)$$

Ismét figyelembe véve (6)-ot:

$$\begin{aligned} E[A^2(1 + \xi(t) - j\varphi(t))(1 + \xi(t+\tau) + j\varphi(t+\tau)) \exp(j\omega_c \tau)] &= \\ &= A^2(1 + E[\xi(t)\xi(t+\tau)] + E[\varphi(t)\varphi(t+\tau)] + \\ &+ jE[\xi(t)\varphi(t+\tau)] - jE[\varphi(t)\xi(t+\tau)]) \exp(j\omega_c \tau) = \\ &= A^2(1 + E[\xi(t)\xi(t+\tau)] + E[\varphi(t)\varphi(t+\tau)]) \exp(j\omega_c \tau) \end{aligned} \quad (19)$$

mivel

$$E[\varphi(t)\xi(t+\tau)] = E[\xi(t)\varphi(t-\tau)] = E[\xi(t)\varphi(t+\tau)] \quad (20)$$

A (18) és (19) alapján

$$R_{VV}(\tau) = \frac{1 + \sigma_\xi^2 R_{\xi\xi}(\tau) + \sigma_\varphi^2 R_{\varphi\varphi}(\tau)}{1 + \sigma_\xi^2 + \sigma_\varphi^2} \exp(j\omega_c \tau) \quad (21)$$

$$S_{VV}(\omega) = \frac{\delta(\omega - \omega_c) + \int_0^{2\pi} [\sigma_\xi^2 R_{\xi\xi}(\tau) + \sigma_\varphi^2 R_{\varphi\varphi}(\tau)] \exp[j(\omega_c - \omega)\tau] d\omega\tau}{1 + \sigma_\xi^2 + \sigma_\varphi^2} \quad (22)$$

ahol $\delta(\dots)$ a Dirac delta.

Ez azt jelenti, hogy sem az autokorreláció, sem a spektrum tulajdonságai alapján nem tudjuk az amplitúdó- és a fáziszajt szétválasztani.

II. A zajszoknya oka

A spektrumvonal kis spektrális értékeknél történő fokozatos kiszélesedését zajszoknyának nevezzük, mások ezt zajfüggőnynek is nevezik. Szeretnénk tudni, mi a zajszoknya oka. A (21)-es egyenletből indulunk ki.

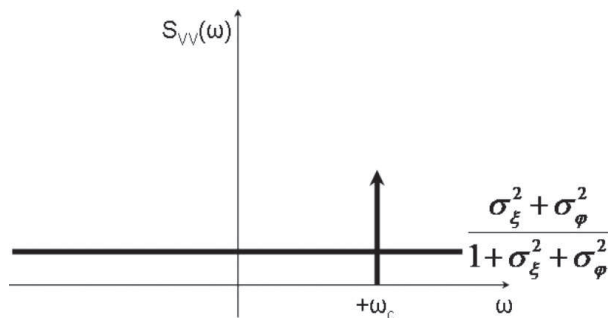
Ha az amplitúdó- és a fáziszaj korrelálatlan, akkor $R_{\xi\xi}(\tau) = \delta(\tau)$, $R_{\varphi\varphi}(\tau) = \delta(\tau)$ (23,24)

Így a kimenőfeszültség autokorrelációja

$$R_{VV}(\tau) = \frac{1 + \sigma_{\xi}^2 \delta(\tau) + \sigma_{\varphi}^2 \delta(\tau)}{1 + \sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\varphi}^2} \exp(j\omega_c \tau) \quad (25)$$

Ismert Fourier-transzformációs összefüggések alkalmazásával a teljesítményspektrum

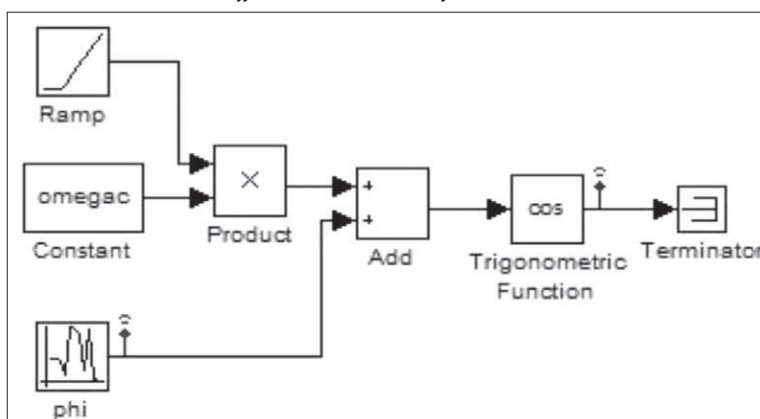
$$S_{VV}(\omega) = \frac{\delta(\omega - \omega_c)}{1 + \sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\varphi}^2} + \frac{\sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\varphi}^2}{1 + \sigma_{\xi}^2 + \sigma_{\varphi}^2} \quad (26)$$



10. ábra
A zajos szinuszejel teljesítmény-spektruma, (26) alapján

Széles körben elterjedt nézet, hogy a zajszoknya oka a fáziszaj. Ezzel szöges ellentétben, a (26) egyenletből látjuk, hogy korrelálatlan zaj esetén, még akkor is, ha ez fáziszaj, nincs zajszoknya. Továbbá, (22) szerint a korrelált amplitúdó zaj önmagában is zajszoknyát okoz. Ezért a zajszoknya oka az amplitúdó- és/vagy a fáziszaj Dirac-deltától eltérő autokorrelációja, amit (22) segítségével egyszerűen figyelembe vehetünk.

11. ábra
Korrelálatlan fáziszajjal terhelt szinuszejel előállítása

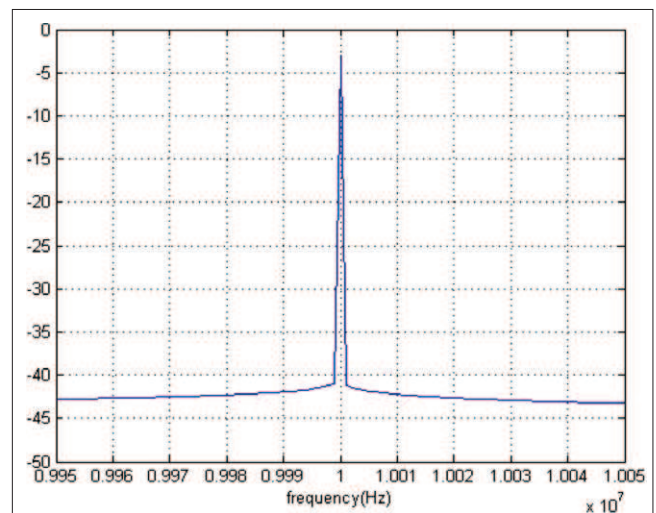


III. Az eredmények igazolása szimulációval

Az előzőekben feltételt (6) tettünk (ergodikus hipotézis), és ennek felhasználásával fontos következtetésre jutottunk a II. Függelékben. Logikailag úgy válik teljessé a vizsgálatunk, ha valahogyan a levont következtetés helyességét, és ezáltal közvetve az ergodikus hipotézis helyességét próbáljuk meg igazolni. Ez a célja ennek a Függeléknek.

Azt fogjuk bemutatni a (6) hipotézis felhasználása nélkül, hogy i) korrelálatlan fáziszaj nem okoz zajszoknyát, ii) az amplitúdó zaj korrelációja fáziszaj nélkül is zajszoknyát okoz. Ehhez a Matlab/Simulink szimuláció lehetőségét használjuk fel. Egyszerűen tudunk korrelálatlan zajt szimulálni. i) Bemutatjuk a korrelálatlan fáziszajjal terhelt szinuszejel spektrumát. ii) Korrelált amplitúdó zajjal terhelt szinuszejel spektrumát vizsgáljuk meg, és megnézzük, hogy a korreláció valóban zajszoknyát okoz-e fáziszaj nélkül is.

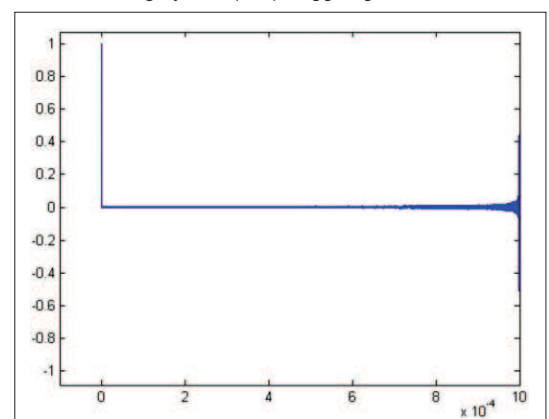
i) **Korrelálatlan fáziszajjal terhelt szinuszelet** állítottunk elő a 11. ábra szerinti Simulink rendszerrel.



13. ábra A zajos szinuszejel spektruma

Vízszintes tengely: frekvencia (Hz),
függőleges tengely: spektrumkomponens amplitúdója dB-ben

12. ábra
A fáziszaj autokorrelációja a Dirac deltát közelíti



A 13. ábrán láthatjuk, hogy bár volt fáziszaj, mégis zajsoknya (nagyon keskeny, csak az analízis véges, 1 ms-os hossza miatt van), (26)-tal összhangban.

ii) Most megnézzük ugyanezt korrelált amplitúdó-zajjal. A zajos jelet a 14. ábrán látható módon állítottuk elő. A korreláció előidézéséhez bármilyen memóriás áramkör megfelel, itt egy 10 kHz-es aluláteresztő szűrőt alkalmaztunk. A 16. ábrán láthatjuk, hogy (22)-vel összhangban megjelent a zajsoknya, pedig csak amplitúdó-zaj volt a szinuszjelen.

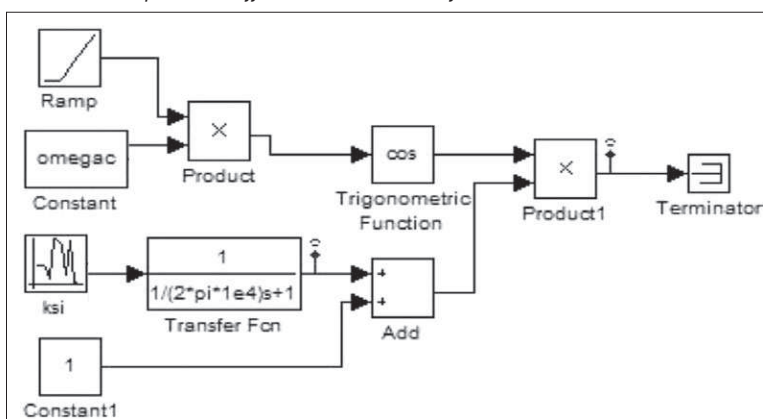
Mivel az ebben a függelékben elért eredményeket a (6) ergodikus hipotézis nélkül értük el, és az előző eredményeinkkel összhangban vannak, ez a hipotézis helyességét támasztja alá.

Irodalom

- [1] D.B. Leeson,
„A Simple Model of
Feedback Oscillator Noise Spectrum”,
In Proc. IEEE, Vol. 54, February 1966, pp.329–330.
- [2] M. Iqbal, J. Lee, K. Kim,
„Performance Comparison of Digital Modulation
Schemes with Respect to
Phase Noise Spectral Shape”,
Electrical and Computer Engineering,
Canadian Conf., March 2000, Vol. 2, pp.856–860.
- [3] E. McDonald, R. Speelman, E. Grayver, N. Wagner,
„Real-Time Hardware/Soft-ware Approach
to Phase Noise Emulation”,
IEEE Aerospace Conference, 2007, pp.1–5.
- [4] Y.W. Kim, J.D. Yu,
„Phase Noise Model of Single Loop Frequency
Synthesizer”,
IEEE Trans. on Broadcasting,
Vol. 54, No.1, March 2008, pp.112–119.
- [5] T.H. Lee, A. Hajimiri,
„Oscillator Phase Noise: A Tutorial”,
IEEE Journal of Solid-State Circuits,
Vol. 35, No.3, March 2000, pp.326–336.
- [6] A. Demir,
„Phase Noise and Timing Jitter in Oscillators
with Colored-Noise Sources”,

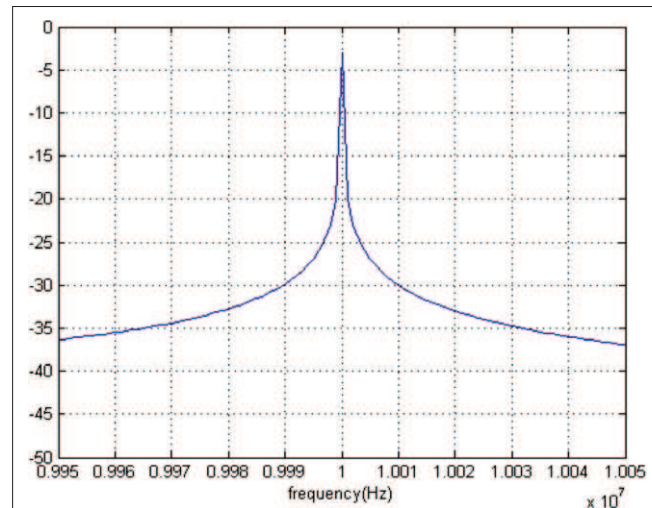
14. ábra

Korrelált amplitúdó-zajjal terhelt szinuszjel előállítása



IEEE Trans. on Circuits and Systems-I:
Fundamental Theory and Applications,
Vol. 49, No.12, December 2002, pp.1782–1791.

- [7] J. Mukherjee, P. Roblin, S. Akhtar,
„An Analytic Circuit-Based Model for White and
Flicker Phase Noise in LC Oscillators”,
IEEE Trans. on Circuits and Systems-I:
Regular Papers,
Vol. 54, No.7, July 2007, pp.1584–1598.
- [8] A. Papoulis, S.U. Pillai,
„Probability, Random Variables and
Stochastic Processes”,
4th Edition, 2002, McGraw-Hill, p.524.
- [9] ARRL Handbook 2003,
Fig. 14.24.
- [10] J. Ladvánszky, G. Kovács,
„Software Based Separation of Amplitude and
Phase Noises in Time Domain”,
Proc. of the ISCAS'2011,
Rio de Janeiro, Brazil, pp.769–772.



16. ábra

A korrelált amplitúdó-zajjal terhelt szinuszjel spektruma

Vízszintes tengely: frekvencia (Hz),

függőleges tengely: spektrumkomponens amplitúdója dB-ben

15. ábra

Az amplitúdó-zaj autokorrelációja
számottevően különbözik a Dirac-deltától

Vízszintes tengely: idő (sec), függőleges: autokorreláció

