A geometriai optika módszereinek alkalmazhatósága mikrohullámú összeköttetések tervezésénél

CSERNOCH JÁNOS
ORION

CSERNOCH JÁNOS

1954-ben fejezte be tanulmányait az Eötvös Loránd Tudományegyetem fizikus szakán. Mikrohullámú műszerek és rádiólokátorok gyártástechnológiájával foglalkozott. Mai szakmai területe analóg és digitális mikrohullámú rendszertechnika, továbbá elektromágneses hullámok terjedése. A Kandó Kálmán Villamosipari Főiskolán ezeket a témákat oktatja. Több közlemény szerzője.

ÖSSZEFOGLALÁS

A szerző a Maxwell-egyenletekből kiindulva megvizsgálja a geometriai optika módszereinek alkalmazhatóságát. A geometriai optika módszereinek alkalmazási határait az általános esetre hibaszámítással támasztja alá.

1. Általános szempontok

A geometriai optika módszereit a fizikában előszeretettel a látható fénytartományban lejátszódó jelenségek leírására használják. (Frekvencia nagyságrendje $\lambda = 10^{14}$ Hz és a hullámhossz nagyságrendje $\lambda = 10^{-7}$ m). A geometriai optika a hullámhossz méretét hanyagolja el tehát a megállapításainak az alapja, hogy $\lambda \to 0$.

Ebben a tárgyalásmódban a hullámfront ortogonális trajektoriáit sugárnak nevezik. Ezzel a fogalommal jelölik a fénysugár útját is.

Nyilvánvaló probléma akkor léphet fel, ha a hullám olyan közegben terjed, melyben a diszkontinuitások méretei összemérhetők a hullámhosszal. Ilyenkor a fizikai optikából jól ismert diffrakció lép fel.

A troposzférában

$$\frac{dn}{dh} = 125 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{km}}$$

-nél nagyobb törésmutató gradiens nem valószínű.

$$\left(a = 500,\ b = 0{,}25\ \frac{1}{\text{km}}\right).$$

Diszkrét rétegek vastagsága m-eket és km-eket is kitehet, mely mellett a cm nagyságok valóban elhanyagolhatók.

A cm nagyságrendű diszkontinuitások meteorológiailag dinamikus jellegűek. A fénytörés törvénye alakilag két élesen különböző közeg határfelületén frekvenciától függetlenül érvényes, természetesen figyelembe véve azt, hogy a törésmutató frekvenciafüggő [5], [3].

Érdemes tehát a Descartes—Snellius-féle törési törvényt folytonos törésmutatóváltozás esetére is általánosítani. Miután a diffrakción kívül a geometriai optika alkalmazhatóságának a Maxwell-egyenletekből adódó kritériumai is vannak ezért ezt a problémát most a Maxwell-egyenletek tükrében kell vizsgálnunk.

Az elkövetkezendő fejezetek ezt kívánják tisztázni.

Beérkezett: 1984. VI. 6. (*)

2. Maxwell-egyenletek inhomogén közegben [4]

Inhomogén, de izotróp közegben az anyagállandók, a dielektromos állandó $e = e(\overline{r})$ és a permeabilitás $\mu = \mu(\overline{r})$ skalár-vektor függvények, azaz értékük általában függ a helytől.

A viszonyokat az antenna távolterében tárgyaljuk és az áramsűrűséget és a töltéssűrűséget zérusnak vesszük

$$\overline{j} = 0, \quad \varrho = 0.$$

A Maxwell-egyenletek ebben az esetben

$$\text{rot}\,\overline{H} = \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \quad \text{2.1}$$

$$\text{rot}\,\overline{E} = \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \quad \text{2.2}$$

$$\text{div}\,\overline{D} = 0 \quad \text{2.3}$$

$$\text{div}\,\overline{B} = 0 \quad \text{2.4}$$

Az anyagállandók bevezetése után kapjuk

$$\text{rot}\,\overline{H} = e\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \quad \text{2.5}$$

$$\text{rot}\,\overline{E} = -\mu\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} \quad \text{2.6}$$

$$e\,\text{div}\,\overline{E} + (\overline{E}\,\text{grad}\,e) = 0 \quad \text{2.7}$$

$$\mu\,\text{div}\,\overline{H} + (\overline{H}\,\text{grad}\,\mu) = 0 \quad \text{2.8}$$

Vegyük a 2.5 és 2.6 egyenlet mindkét oldalának a rotációját és vegyük figyelembe, hogy

$$\text{rot rot}\,\overline{y} = \text{grad div}\,\overline{y} - \Delta\overline{y}$$

$$\text{rot rot}\,\overline{H} = e\,\text{rot}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} - \left[\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \times \text{grad}\,e\right] \quad \text{2.9}$$

$$\text{rot rot}\,\overline{E} = -\left\{\mu\,\text{rot}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} - \left[\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} \times \text{grad}\,\mu\right]\right\} \quad \text{2.10}$$

Az eredeti Maxwell-egyenletekkel való egybevetés után kapjuk, hogy

$$\Delta\overline{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} + \left[\frac{\text{grad}\,e \times \text{rot}\,\overline{H}}{\varepsilon}\right] - \text{grad div}\,\overline{H} = 0 \quad \text{2.11}$$

$$\Delta\bar{\mathbf{E}}-\varepsilon\mu\frac{\partial\bar{\mathbf{E}}}{\partial t}+\left[\frac{\operatorname{grad}\mu\times\operatorname{rot}\bar{\mathbf{E}}}{\mu}\right]-\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{\mathbf{E}}=0 \qquad 2.12$$

illetve

$$\Delta\bar{H}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\bar{\mathbf{H}}}{\partial t^2}+[\operatorname{grad}(\ln\varepsilon)\times\operatorname{rot}\bar{\mathbf{H}}]+$$

$$+\operatorname{grad}(\bar{\mathbf{H}}\operatorname{grad}\ln\mu)=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; 2.13$$

$$\Delta\bar{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\bar{\mathbf{E}}}{\partial t^2}+[\operatorname{grad}(\ln\mu)\times\operatorname{rot}\bar{\mathbf{E}}]+$$

$$+\operatorname{grad}(\bar{\mathbf{E}}\operatorname{grad}\ln\varepsilon)=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; 2.14$$

Az adott kezdeti és peremfeltételek mellett az

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}(\bar{\mathbf{r}}),$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}(\bar{\mathbf{r}}),$$

térerősségek ezen differenciálegyenletek megoldásaként adódnak.

A következő három fejezetben a mikrohullámú összeköttetéseket szem előtt tartva az előbbi egyenleteket a földi légköri viszonyaira oldjuk meg.

Három esetet vizsgálunk meg:

- Síkrétegezett légkör.
- Gömbi rétegződésű légkör.
- Szabálytalanul inhomogén közeg.

3. Maxwell-egyenletek megoldása síkrétegezett inhomogén közegben [4]

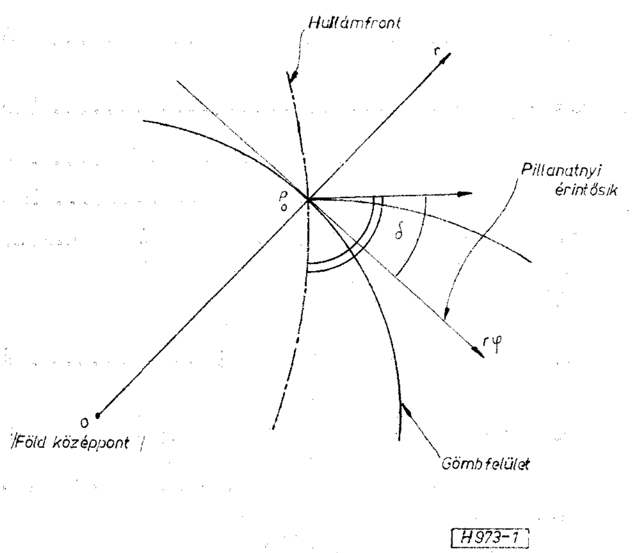
A feladatunkat most úgy fogalmazzuk meg. hogy az anyagállandók csak a légkör z magasságától függenek, tehát

$$\varepsilon=\varepsilon(z) \quad \text{és} \quad \mu=\mu(z)$$

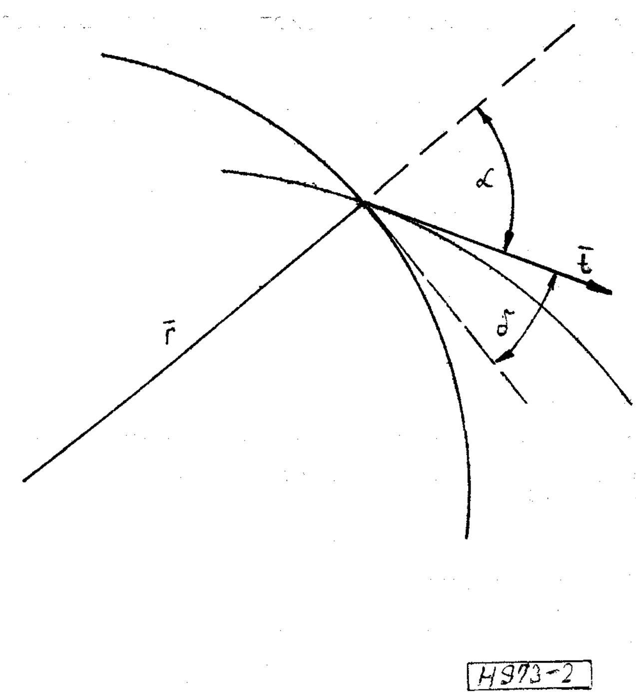
a föld felületét síknak tételezzük fel és a problémát a koordinátarendszer megfelelő megválasztásával a (zx) síkban vizsgáljuk. A térerősségek időbeli változását szinuszosnak vesszük.

Lineárisan polarizált **TE** hullámnak nevezzük azt a hullámot, ahol

$$E_X=E_Z=0$$



1. ábra. Az általános törési törvény levezetéséhez



2. ábra. Gömbi rétegződés esete

azaz az elektromos térerősség merőleges a (**ZX**) síkra.

Lineárisan polarizált **TM** hullámnak nevezzük azt a hullámot ahol

$$H_X=H_Z=0$$

azaz a mágneses térerősség merőleges a (**ZX**) síkra.

Tetszőleges irányú lineárisan polarizált hullám felbontható *TE* és *TM* hullámok összegére. Ha komplex amplitúdókat is megengedünk akkor ez a megállapítás elliptikusan polározott hullámra is igaz.

Első lépésben vizsgáljuk meg a *TE* hullámot.

A Maxwell-egyenletek ebben az esetben

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=j\omega\varepsilon(z)Ey,$$

$$\frac{\partial H_y}{0x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=0,$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-j\omega\mu(z)H_x,$$

$$0=-j\omega\mu(z)H_y,$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}=-j\omega\mu(z)H_z.$$

Ebből az F_y-ra érvényes a következő egyenlet

$$\frac{\partial^2 Ey}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Ey}{\partial z^2}-\frac{\partial[\ln\mu(z)]}{\partial z}\cdot\frac{\partial Ey}{\partial z}+\omega^2\varepsilon(z)\mu(z)E_y=0.$$

Az

$$n(z)=\frac{c}{v(z)}=c\sqrt{\varepsilon(z)\mu(z)}$$

törésmutató és az

$$\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda_0}=\beta_0,$$

fázistényező bevezetésével kapjuk, hogy

$$\omega^2\varepsilon(z)\mu(z)=\beta_0^2 n^2(z)$$

(a vákuumban mért hullámhossz $c=2{,}998\cdot 10^8\ \frac{m}{sec}$ a fény terjedési sebessége vákuumban.)

A megoldandó parciális differenciál egyenlet a következő

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}-\frac{\partial[\ln\mu(z)]}{\partial z}\frac{\partial E_y}{\partial z}+\beta_0^2 n^2(z)E_y=0.$$

A differenciálegyenletet a változók szétválasztásával oldjuk meg

$$E_y(x,\ z)=X(x)\cdot Z(z),$$

$$\frac{1}{x}\frac{d^2x}{dx^2}=-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}+\frac{d[\ln\mu(z)]}{dz}\frac{1}{z}\frac{dZ}{dz}-\beta_0^2 n^2(z).$$

Az egyenlet csak úgy állhat fenn, ha

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=C_1=\text{konst}$$

és

$$-\frac{1}{z}\frac{d^2z}{dz^2}+\frac{d[\ln\mu(z)]}{dz}\frac{1}{z}\frac{dZ}{dz}-\beta_0^2 n^2(z)=C_1=\text{konst}.$$

A térerősségnek x irányú változása szinuszos, ezért

$$C_1=-k^2=\beta_0^2 C_2,$$

lahol k vaós szám és C_2 állandó.

Az X-re vonatkozó egyenlet megoldása általában

$$X(x)=Ce^{i\beta_0 c_2 x}.$$

A parciális differenciálegyenlet megoldása általában a szinuszos időbeli függést is felvéve

$$Ey(x,\ z,\ t)=C_3|Z(z)|e^{j\{\omega t\pm[\varphi(z)+\beta_0 c_2 x]\}}.$$

Az esetleges hullámvisszaverődést nem kell figyelembe venni, mert a reflexiós tényező igen kicsi. A reflexiós tényező gyakorlatilag soha elő nem forduló maximális értéke (a földi légkörben!) a tapasztalat szerint

$$\left|\begin{matrix}\Gamma\\ \max\end{matrix}\right|=\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}-1}{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}+1}\right|=\left|\frac{\sqrt{\varepsilon_r}-1}{\sqrt{\varepsilon_r}+1}\right|,$$

$$\left|\begin{matrix}\Gamma\\ \max\end{matrix}\right|=\left|\frac{n-1}{n+1}\right|<\left|\frac{n-1}{2}\right|=\frac{400\cdot 10^{-6}}{2}=$$

$$=2\cdot 10^{-4}(n=\sqrt{\varepsilon_r}).$$

Ez a mikrohullámú összeköttetések esetén (föld—föld és föld—műhold) igen pesszimális értéknek számít. A reflexiós tényező a gyakorlatban sokkal (nagyságrendekkel) kisebb. Az azonos fázisú pontok mértani helye a hullám-front egyenlete ilyen feltétel mellett

$$\omega t\pm[\varphi(Z)+\beta_0 C_2 x]=\Phi_F(z_0,\ x_0 t)=\text{konst}.$$

A pillanatnyi érintősök egyenlete a $P(x_0,\ z_0)$ pontban

$$\omega t\pm[(Z-Z_0)\beta\sin\delta+(x-x_0)\beta\omega s\delta]=0.$$

Itt

$$\beta_0=\frac{2\pi f}{\lambda_0 f}=\frac{\omega}{c}=\frac{\omega}{v}\cdot\frac{1}{n(z)}=\frac{\beta}{n(z)}.$$

Mivel

$$\frac{\partial\Phi_F}{\partial x}=\beta_0 C_2=\frac{\beta}{n(z)}C_2=\beta\cos\delta,$$

ahonnan

$$n(z)=\cos\delta=C_2.$$

Ez a törési törvény általánosítása. Tehát a geometriai optika útján levezetett törvény a síkrétegezett közeg esetén mikrohullámok tartományában is használható.

TM hullám esetén a Maxwell-egyenletek a következők

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z}=j\omega\varepsilon(z)E_x j\omega H_x=-\frac{1}{\varepsilon(z)}\frac{\partial H_y}{\partial z},$$

$$0=j\omega\varepsilon(z)E_y,$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}=j\omega\varepsilon(z)E_z,$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_y}{\partial x}=-j\omega\mu(z)H_y,$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_y}{\partial y}=0.$$

A megoldandó differenciálegyenlet

$$\frac{\partial^2 Hy}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Hy}{\partial z^2}-\frac{\partial[\ln\varepsilon(z)]}{\partial z}\frac{\partial H_y}{\partial z}+\omega^2\varepsilon(z)\mu(z)H_y=0.$$

Ebből az egyenletből az előzővel azonos következtetés vonható le. Tehát a levezetett törési törvény minden polarizációra igaz.

A geometriai optika módszerei síkrétegezett közegben az előző megszorításokkal bármilyen polarizációban használhatók.

4. Maxwell-egyenletek megoldása gömbi rétegződésű közegben

A feladatunkat most gömbi rétegződés esetére oldjuk meg. A problémát síkproblémának tekintve feltételezzük, hogy az anyagállandók csak az r-től függenek azaz

$$\varepsilon=\varepsilon(r),\quad \mu=\mu(r),$$

a föld felületét gömbnek tételezzük fel és a másik független változóként φ-t vesszük. A problémát az (r, φ) síkban vizsgáljuk. A felesleges bonyoldalmak elkerülése érdekében mivel a probléma síkprobléma gömbi koordináták helyett henger-koordinátákat használunk. Nem követünk el hibát, ha a gömbfelületnek erre vonatkozó részét hengerfelülettel helyettesítjük.

Lineárisan polározott *TE* hullámnak nevezzük azt a hullámot, ahol

$$E_r = E_\varphi = 0,$$

azaz elektromos térerősség merőleges a ($z=0$) síkra.

Lineárisan polározott *TM* hullámnak nevezzük azt a hullámot, ahol

$$H_r = H_\varphi = 0,$$

azaz a mágneses térerősség merőleges a ($z=0$) síkra. Vizsgáljuk meg most a TE hullámot.

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi}\right] = j\omega\varepsilon(r)E_z,$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(rH_\varphi)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = 0,$$

$$0 = -j\omega\mu(r)H_z,$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial E_z}{\partial \varphi}\right] = -j\omega\mu(r)H_r,$$

$$-r\cdot\frac{\partial E_z}{\partial r} = -j\omega\mu(r)(H_{\varphi r}).$$

A megoldandó differenciálegyenlet

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial[\ln\mu(r)}{\partial r}\frac{\partial E_z}{\partial r} +$$

$$+\omega^2\varepsilon(r)\mu(r)E_2 = 0.$$

A törésmutató bevezetése után kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi_2} - \frac{\partial[\ln\mu(r)]}{\partial r}\frac{\partial E_z}{\partial r} +$$

$$+\beta_0^2 n^2(r)E = 0.$$

A differenciálegyenletet a változók szétválasztásával oldjuk meg

$$E_z(r, \varphi) = R(r)\cdot\Phi(\varphi),$$

$$\frac{1}{R}\left\{r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r\frac{\partial R}{\partial r} - r^2\frac{\partial[\ln\mu(r)]}{\partial r}\right\} + r^2\beta_0^2 n^2(r) =$$

$$= -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2},$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -k^2 = -\beta_0^2\alpha^2,$$

$$\Phi(\varphi) = C_1 e^{-j\beta_0\alpha\varphi}.$$

Helyezzük most el a polárkoordinátáknak megfelelő $x_1 = r\varphi$ és az $x_2 = r$ ortogonális koordinátarendszerünk középpontját a hullámfront $P_0(r_0, \varphi_0)$ pontjába oly módon, hogy az $x_2 = r$ változónak megfelelő tengely az $r=$konst gömbfelület normálisával essék egybe és az $x_1 = r\varphi$ változónak megfelelő tengely az érintősíkban feküdjék.

Az azonos fázisú pontok mértani helye a hullámfront egyenlete

$$\omega t \pm [\varphi(r) + \beta_0 C_2\varphi] = \Phi_F(r_0, \varphi_0, t_0).$$

Illetve

$$\omega t \pm \left[\varphi(r) + \frac{\beta}{rn(r)}C_2(r\varphi)\right] = \text{konst}.$$

Az esetleges hullámvisszaverődést nem kell figyelembe venni, mert egyrészt a visszavert hullám útja gömbi rétegződési közegben ferde beesés mellett más mint a beeső hullámé, másrészt a reflexiós tényező igen kicsi. (Lásd az előző fejezetet.)

A pillanatnyi érintősík egyenlete a $P_0(r_0, \varphi_0)$ pontban a mi koordináta-rendszerünkben

$$\omega t \pm [(r - r_0)\beta\sin\delta + (r\varphi - r\varphi_0)\beta\cos\delta)] = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi_F}{\partial(r\varphi)} = \frac{\beta C_2}{rn(r)} = \beta\cos\delta,$$

ahonnan

$$rn(r)\cos\delta = C_2.$$

Okoskodásunkat értelemszerűen a *TM* hullámformára alkalmazva ugyanezt az eredményt kapjuk.

A geometriai optika módszerei gömbi rétegzett közegben az előbbi megszorításokat figyelembevéve használhatók.

Feltétlenül meg kell jegyezni itt azt, hogy miután mi az általános Snellius—Descartes-törvényt síkrétegzett közegben a Maxwell-egyenletekből kiindulva már levezettük azaz

$$n(z)\cos\delta = n_0\cos\delta_0 = \text{konst},$$

a gömbi rétegzésre vonatkozó bizonyítást az

$$m(r) = \frac{n(r)r}{R_0},$$

módosított törésmutató bevezetésével sík problémává tudjuk redukálni. Ha ui. feltételezzük azt, hogy síkrétegződés esetén a törésmutató

$$m(r),$$

szerint változik, akkor erre vonatkozóan az

$$m(r)\cos\delta = n_0\cos\delta_0 = \text{const}$$

egyenlet felírható.

5. Maxwell-egyenletek szabálytalanul inhomogén közegben [4]

Ennek a problémának az utolsó lépéseként érdemes most már az általános esetre is néhány pillantást vetni. Az anyagállandók itt általános skalár-vektor függvények.

$$\varepsilon = \varepsilon(F), \quad \mu = \mu(F).$$

Ez a mi körülményeink között az atmoszférában természetesen azt jelenti, hogy az anyagállandók nemcsak a z (vagy r) magasságtól függenek, hanem az előzőnél kisebb mértékben ugyan, de a többi koordinátáktól is.

Megvizsgáljuk a geometriai optika törvényeinek alkalmazhatóságát a mikrohullámok tartományában egy adott mikrohullámú összeköttetés paramétereiből kiindulva ilyen közegben is.

Válasszuk szét most a térerősségek kifejezésében az időtől és helytől függő részt

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \bar{E}_0(\bar{r})e^{j\omega t}\bar{H}(r, t) = \bar{H}_0(\bar{r})e^{j\omega t}.$$

Az időtől függő részt itt szinuszosnak vettük, amivel nem vétünk az általánosság ellen.

A Maxwell-egyenletek ebben az esetben

$$\text{rot}\,\bar{H}_0(\bar{r}) = j\omega\varepsilon(r)\bar{E}_0(r) \quad \text{5.1}$$

$$\text{rot}\,\bar{E}_0(\bar{r}) = j\omega\mu_0(r)\bar{H}_0(r) \quad \text{5.2}$$

$$\text{div}\,[\varepsilon(\bar{r})\cdot\bar{E}(\bar{r})] = 0 \quad \text{5.3}$$

$$\text{div}\,[\mu(\bar{r})\cdot\bar{H}(\bar{r})] = 0 \quad \text{5.4}$$

Ha a közeg homogén

$$\varepsilon(\bar{r}) = \text{konst}, \qquad \mu(\bar{r}) = \text{konst},$$

az egyenletek egyik megoldása homogén közeg esetén mint ismeretes

$$\bar{E}_0 = \bar{e}e^{-j\beta_0 n(\bar{r}\bar{s})} \quad \text{5.5}$$

$$\bar{H}_0 = \bar{h}e^{-j\beta_0 n(\bar{r}\bar{s})} \quad \text{5.6}$$

Az $\bar{e}$ és $\bar{h}$ vektorok itt állandó komplex vektorok.

A törésmutató

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}}{\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0}}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\,\frac{As}{Vm}, \qquad \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{Vs}{Am},$$

továbbá r a relatív dielektromos állandó és μ_r a relatív permeabilitás.

Az azonos fázisú pontok mértani helye egy sík

$$(\bar{r}\bar{s}) = \text{const} \quad \text{5.7}$$

$$\text{ahol } \bar{r} = \bar{r}(x, y, z) \quad \text{5.8}$$

$$\bar{s} = \bar{s}(\cos\alpha_x, \cos\alpha_y, \cos\alpha_z) \quad \text{5.9}$$

A Maxwell-egyenletek megoldását az általános esetre írjuk most fel

$$\bar{E}_0(\bar{r}) = \bar{e}(\bar{r})e^{-j\beta_0\varphi(\bar{r})} \quad \text{5.10}$$

$$\bar{H}_0(\bar{r}) = \bar{h}(\bar{r})e^{-j\beta_0\varphi(r)} \quad \text{5.11}$$

alakban. (φ dimenziója méter.) Itt az $\bar{e}$ és $\bar{h}$ komplex vektorok már nem állandók, hanem az anyagállandók változása mértékében változnak. Tehát ha az anyagállandók kisebb mértékben változnak akkor az $\bar{e}$ és $\bar{h}$ vektorok is kisebb mértékben változnak. Ha az anyagállandók nagyobb mértékben változnak, akkor az $\bar{e}$ és $\bar{h}$ vektorok is nagyobb mértékben változnak.

A

$$\varphi(\bar{r}) = \text{const},$$

az azonos fázisú pontok mértani helye a hullámfront egyenlete. Ennek dimenziója [m] grad φ a felület trajektoriájának az irányát és ezzel a hullámterjedés irányát is jelöli.

A

$$\text{rot}\,\lambda\bar{y} = \lambda\,\text{rot}\,\bar{y} - [\bar{y}\times\text{grad}\,\lambda],$$

$$\text{div}\,\lambda\bar{y} = \lambda\,\text{div}\,\bar{y} + (\bar{y}\,\text{grad}\,\lambda),$$

összefüggéseket felhasználva kapjuk, hogy

$$\text{rot}\,\bar{h} + j\beta_0[\bar{h}\times\text{grad}\,\varphi] = j\beta_0 c\varepsilon\bar{e},$$

$$\text{rot}\,\bar{e} + j\beta_0[\bar{e}\times\text{grad}\,\varphi] = j\beta_0 C\mu\bar{h},$$

$$\varepsilon[\text{div}\,\bar{e} - j\beta_0(\bar{e}\,\text{grad}\,\varphi)] + (\bar{e}\,\text{grad}\,\varepsilon) = 0,$$

$$\mu[\text{div}\,\bar{h} - j\beta_0(\bar{h}\,\text{grad}\,\varphi)] + (\bar{h}\,\text{grad}\,\mu) = 0.$$

Itt figyelembe vettük, hogy

$$\omega = \frac{\omega}{c}c = \beta_0 c = \frac{\beta_0}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

Az egyenletek rendezve a következő alakot öltik

$$[\text{grad}\,\varphi\times\bar{h}] + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\varepsilon_r\bar{e} = \frac{1}{j\beta_0}\text{rot}\,\bar{h} \quad \text{5.12}$$

$$[\text{grad}\,\varphi\times\bar{e}] - \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\mu_r\bar{h} = \frac{1}{j\beta_0}\text{rot}\,\bar{e} \quad \text{5.13}$$

$$(\bar{e}\,\text{grad}\,\varphi) = \frac{1}{j\beta_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_r}(\bar{e}\,\text{grad}\,\varepsilon_r) + \text{div}\,\bar{e}\right] \quad \text{5.14}$$

$$(\bar{h}\,\text{grad}\,\varphi) = \frac{1}{j\beta_0}\left[\frac{1}{\mu_r}(\bar{h}\,\text{grad}\,\mu_r) + \text{div}\,\bar{h}\right] \quad \text{5.15}$$

Az egyenletekben

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\ \text{ohm}.$$

Végezzünk most néhány jól megalapozott nagyságrendi becslést. A kitűzött célnak megfelelően a mikrohullámú összeköttetések szemszögéből.

A relatív megváltozás könnyebb megbecsülése érdekében írhatjuk át az egyenleteket egy kissé más alakba

$$\left[\text{grad}\,\varphi\times\frac{\bar{h}}{\bar{h}}\right] + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\varepsilon_r\frac{\bar{e}}{|\bar{h}|} = \frac{1}{j\beta_0}\frac{1}{|\bar{h}|}\text{rot}\,\bar{h} \quad \text{5.16}$$

$$\left[\text{grad}\,\varphi\times\frac{\bar{e}}{\bar{e}}\right] - \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\mu_r\frac{\bar{h}}{|\bar{e}|} = \frac{1}{j\beta_0}\frac{1}{|\bar{e}|}\text{rot}\,\bar{e} \quad \text{5.17}$$

$$\left(\frac{\bar{e}}{|\bar{e}|}\text{grad}\,\varphi\right) = \frac{1}{j\beta_0}\left[\frac{1}{\varepsilon_r}\left(\frac{\bar{e}}{|\bar{e}|}\text{grad}\,\varepsilon_r\right) + \frac{1}{|\bar{e}|}\text{div}\,\bar{e}\right] \quad \text{5.18}$$

$$\left(\frac{\bar{h}}{|\bar{h}|}\text{grad}\,\varphi\right) = \frac{1}{j\beta_0}\left[\frac{1}{\mu_r}\left(\frac{\bar{h}}{|\bar{h}|}\text{grad}\,\varepsilon_r\right) + \frac{1}{|\bar{h}|}\text{div}\,\bar{h}\right] \quad \text{5.19}$$

A különböző nagyságrendeket a következő pontokba foglalhatjuk össze:

a) Közel síkhullám esetén

$$\varphi(\mathrm{r}) \approx \mathrm{n}(\bar{\mathrm{r}}\,\bar{\mathrm{s}}) = \text{const.}$$

Itt figyelembe véve 5.8 és 5.9-et

$$\operatorname{grad}\varphi \approx \mathrm{n}[\cos\alpha_x \bar{\mathrm{i}} + \cos\alpha_y \bar{\mathrm{j}} + \cos\alpha_z \mathrm{k}]$$

$$|\operatorname{grad}\varphi|^2 \approx \mathrm{n}^2[\cos^2\alpha_x + \cos^2 a_y + \cos^2\alpha_z].$$

A légkörben nagyságrendileg érvényes az, hogy

$$|\operatorname{grad}\varphi| = 1.$$

b) A légkörben

$$\operatorname{grad}\mu_r = 0 \qquad \mu_r \approx 1,$$

$$\operatorname{grad}\varepsilon_r = \operatorname{grad}\mathrm{n}^2 = 2\operatorname{grad}\mathrm{n} \qquad \varepsilon_r \approx 1.$$

A törésmutató nem valószínű legnagyobb értéke a számítás egyszerűsége érdekében exponenciális atmoszférát feltételezve (ami egyben a legnagyobb törésmutató változást is jelenti) a következő

$$\mathrm{n} = 1 + 10^{-6} a e^{-bh}, \quad \text{ahol} \quad a = 500,\ b = 0{,}25,$$

$$|\operatorname{grad}\mathrm{n}|_{max} = |\operatorname{grad}\mathrm{n}|_{h=0} = 10^{-6} ab =$$

$$= 10^{-6} 125 \frac{1}{\text{km}} = 1{,}25 \cdot 10^{-7}.$$

c) Az *RF* szakaszcsillapítás
$d_{RF} = 50$ km-es szakasztávolság

$$G_{AdB} = G_{vdB} = 32 \text{ dB},$$

antennanyereségek mellett $f = 2000$ MHz frekvencia esetén

$$A_{RF} = -68{,}45 \text{ db} = 20\log\frac{E_v}{E_A} =$$

$$= 20\log\left(1 - \frac{\Delta E}{E_A}\right).$$

Itt E_v az elektromos térerősség a vevőantenna helyén;
E_A az elektromos térerősség az adóantenna helyén;
ΔE az elektromos térerősség megváltozása az adó- és vevőantenna között.
A fentiekből

$$\frac{E_v}{E_A} = 3{,}78 \cdot 10^{-4} = 1 - \frac{\Delta E}{E_A}.$$

Az elektromos térerősség relatív megváltozása $d_{RF} = 50$ km hosszú szakaszon

$$\frac{\Delta E}{E} = 0{,}999\,622.$$

Az elektromos térerősség átlagos relatív megváltozás m-ként nagyságrendileg

$$\frac{1}{E}\frac{\Delta E}{\Delta x} \approx 1{,}999 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{\text{m}} \approx 2 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}.$$

Ezt a relatív becslést nyugodtan használhatjuk a vektoroperációk esetén is. Tehát nagyságrendileg a 2 GHz-es legalacsonyabb frekvenciasávban.

$$\frac{1}{|\bar{\mathrm{h}}|}\left|\operatorname{rot}\bar{\mathrm{h}}\right|_{max} \approx \frac{1}{|\bar{\mathrm{e}}|}\left|\operatorname{rot}\bar{\mathrm{e}}\right|_{max} \approx 6 \cdot 10^{-4},$$

$$\frac{1}{|\bar{\mathrm{h}}|}\left|\operatorname{div}\bar{\mathrm{h}}\right|_{max} \approx \frac{1}{|\bar{\mathrm{e}}|}\left|\operatorname{div}\bar{\mathrm{e}}\right|_{max} \approx 3 \cdot 10^{-4}.$$

d) Végezetül ha

$$\mathrm{f} = 2000 \text{ MHz} \quad \text{akkor} \quad \frac{1}{\beta_0} = \frac{\lambda_0}{2\pi} = 2{,}4 \cdot 10^{-2}.$$

Ennek megfelelően az átalakított egyenletek a nagyságrendi becslés szempontjából a következően alakulnak

$$\frac{1}{|\bar{\mathrm{h}}|}\left|[\operatorname{grad}\varphi \times \bar{\mathrm{h}}] + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\varepsilon_r \bar{\mathrm{e}}\right| \sim$$

$$\sim 2{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{-4} = 1{,}44 \cdot 10^{-5},$$

$$\frac{1}{|\bar{\mathrm{e}}|}\left|[\operatorname{grad}\varphi \times \bar{\mathrm{e}}] - \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\mu_r \bar{\mathrm{h}}\right| \sim$$

$$\sim 2{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{-4} = 1{,}44 \cdot 10^{-5},$$

$$\frac{1}{\bar{\mathrm{e}}}(\bar{\mathrm{e}}\operatorname{grad}\varphi) \approx 2{,}4 \cdot 10^{-2}(1{,}25 \cdot 10^{-7} + 3 \cdot 10^{-4}),$$

$$\frac{1}{|\bar{\mathrm{h}}|}(\mathrm{h}\operatorname{grad}\varphi) \approx 2{,}4 \cdot 10^{-2}(1{,}25 \cdot 10^{-7} + 3 \cdot 10^{-4}).$$

A fenti pontok alapján legalacsonyabb $f = 2000$ MHz-es frekvenciasávban tehát nyugodtan írhatjuk, hogy

$$[\operatorname{grad}\varphi \times \bar{\mathrm{h}}] + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\varepsilon_r \bar{\mathrm{e}} = 0 \qquad 5.20$$

$$[\operatorname{grad}\varphi \times \bar{\mathrm{e}}] - \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\mu_r \bar{\mathrm{h}} = 0 \qquad 5.21$$

$$(\bar{\mathrm{e}}\operatorname{grad}\varphi) = 0 \qquad 5.22$$

$$(\bar{\mathrm{h}}\operatorname{grad}\varphi) = 0 \qquad 5.23$$

Hangsúlyozzuk azt, hogy ezek a közelítő egyenletek a mikrohullámú frekvenciatartományban csak a földi légkörre vagy csak ott érvényesek, ahol a változások relatíve eléggé csekélyek.

A látható fény tartományban $\left(\frac{1}{\beta} \approx 10^{-7}\ \mathrm{m}\right)$ természetesen már erősebb változások esetén is fennáll az 5.20...5.23 egyenletek érvényessége.
A fenti közelítő egyenletek kimondják azt, hogy az $\bar{\mathrm{e}}$ és $\bar{\mathrm{h}}$ vektorok merőlegesek a hullámterjedés irányára, továbbá egymásra is. Az $\bar{\mathrm{e}}$, $\bar{\mathrm{h}}$ és $\operatorname{grad}\varphi$ vektorok jobb sodrású rendszert alkotnak.

Az 5.21 egyenletből a $\bar{\mathrm{h}}$ vektort kifejezve és az 5.20 egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\mu_r}[\bar{\mathrm{e}} \times \operatorname{grad}\varphi] \times \operatorname{grad}\varphi + \varepsilon_r\,\bar{\mathrm{e}} = 0.$$

Alkalmazva a kifejtési tételt

$$\frac{1}{\mu_r}[(\bar{e}\,\mathrm{grad}\,\varphi)\,\mathrm{grad}\,\varphi-\bar{e}|\mathrm{grad}\,\varphi|^2]+\varepsilon_r\bar{e}=0.$$

Figyelembe véve, hogy

$$(\bar{e}\,\mathrm{grad}\,\varphi)=0,$$

és

$$n^2=s_r\mu_r,$$

$$|\mathrm{grad}\,\varphi|^2=\mathrm{n}^2 \qquad 5.24$$

koordinátákban kiírva

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=n^2(x,\,y,\,z) \qquad 5.25$$

Látni fogjuk, hogy ebből az egyenletből most már a fenti feltételek mellett a geometriai optika törvényei levezethetők.

A w_e elektromos és a w_m mágneses energiasűrűség időbeli átlaga

$$\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathrm{r}})=\bar{\mathrm{e}}(\bar{\mathrm{r}})e^{j\beta\varphi}(\bar{\mathrm{r}})e^{j\omega t},$$

$$\bar{\mathbf{H}}(\bar{\mathrm{r}})=\bar{\mathrm{h}}(\bar{\mathrm{r}})e^{j\beta\varphi}(\bar{\mathrm{r}})e^{j\omega t},$$

felírás alkalmazásával

$$w_e=\frac{1}{4}(\bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{D}}^*)=\frac{\varepsilon}{4}(\bar{e}\bar{e}^*)=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{4}(\bar{e}\bar{e}^*) \qquad 5.26$$

$$\mathrm{w}_m=\frac{1}{4}(\bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{B}}^*)=\frac{\mu}{4}(\bar{\mathrm{h}}\bar{\mathrm{h}}^*)=\frac{\mu_0\mu_r}{4}(\bar{\mathrm{h}}\bar{\mathrm{h}}^*) \qquad 5.27$$

Az 5.21 egyenletet és az 5.27 egyenletet egybevetve kapjuk, hogy

$$\bar{\mathbf{h}}=\frac{1}{\mu_r}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}[\mathrm{grad}\,\varphi\times\bar{e}],$$

$$w_m=\frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{4}([\mathrm{grad}\,\varphi\times\bar{e}]\bar{\mathrm{h}}^*),$$

$$w_e=w_m=\frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{4}([\mathrm{grad}\,\varphi\times\bar{e}]\bar{\mathrm{h}}^*) \qquad 5.28$$

A komplex Poynting-vektor

$$\bar{\mathrm{S}}_k=\frac{1}{2}[\bar{\mathbf{E}}\times\bar{\mathbf{H}}^*]=\frac{1}{2}[\bar{e}\times\bar{\mathrm{h}}^*].$$

Az 5.21 egyenletet figyelembe véve és a kifejtési tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\bar{\mathrm{S}}_k=\frac{1}{2\mu_r}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\{\bar{e}^*\times[\mathrm{grand}\,\varphi\times\bar{e}^*]\},$$

$$\bar{\mathrm{S}}_k=\frac{1}{2\mu_r}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\{[\bar{\mathbf{e}}\times\mathrm{grad}\,\varphi]\times\bar{\mathbf{e}}\},$$

$$\bar{\mathrm{S}}_k=\frac{1}{2\mu_r}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\begin{vmatrix}(\bar{e}\bar{\mathbf{e}}^*) & (\bar{e}\,\mathrm{grad}\,\varphi)\\ \bar{\mathbf{e}}^* & \mathrm{grad}\,\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2\mu_r}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}(\bar{e}\bar{\mathbf{e}}^*)\,\mathrm{grad}\,\varphi,$$

$$\bar{\mathrm{S}}_k=\frac{2}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\,\frac{1}{\varepsilon_r\mu_r}\,\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{4}(\bar{e}\bar{e}^*)\,\mathrm{grad}\,\varphi,$$

$$\bar{\mathrm{S}}_k=\frac{2c}{n^2}w_e\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

A teljes energiasűrűség időbeli átlaga az elektromos és a mágneses energiasűrűség időbeli átlagának összege

$$w=w_e+w_m=2w_e.$$

Innen a komplex Poynting-vektor

$$\bar{\mathrm{S}}_k=vw\frac{\mathrm{grad}\,\varphi}{n}=vw\bar{\mathrm{t}} \qquad 5.29$$

Az 5.24 egyenletet figyelembe véve kimondhatjuk, hogy a

$$\frac{\mathrm{grad}\,\varphi}{n}=\frac{\mathrm{grad}\,\varphi}{|\mathrm{grad}\,\varphi|}=\bar{\mathrm{t}}$$

egységvektor.

Ha most a sugárpálya egy pontjának helyvektora $\bar{\mathrm{r}}=\bar{\mathbf{r}}(s)$ egy fix pontból mért ív hosszfüggvényében (vektor- és skalárfüggvény) akkor ennek s szerinti differenciálhányadosa egységvektor

$$\frac{\mathrm{grad}\,\varphi}{\mathrm{n}}=\frac{\mathrm{d}\bar{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}s}=\bar{\mathrm{t}} \qquad 5.30$$

Ebből az egyenletből most már levezethetjük a sugárpálya differenciálegyenletét. (A hullámfront orthogonális trajektóriája.) A kiinduló egyenletünk

$$\mathrm{n}\frac{\mathrm{d}\bar{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}s}=\mathrm{grad}\,\varphi=\mathrm{u}=\mu_x\bar{\mathbf{i}}+\mu_y\bar{\mathbf{j}}+\mu_z\bar{\mathrm{k}}.$$

Az egyenlet csak x irányú komponensre felírva kapjuk, hogy

$$n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=u_x.$$

Differenciáljuk az egyenlet mindkét oldalát az ívhossz szerint

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)=\left(\frac{\mathrm{d}\bar{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{grad}\,\varphi\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{1}{n}\left(\mathrm{grad}\,\varphi\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{grad}\,\varphi=\frac{1}{n}\left(\bar{\mathrm{u}}\frac{\partial\bar{\mathrm{u}}}{\partial x}\right)\right).$$

A többi komponenst is figyelembe véve

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\bar{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{n}\left[\left(\bar{\mathrm{u}}\frac{\partial\bar{\mathrm{u}}}{\partial x}\right)\bar{\mathrm{i}}+\left(\bar{\mathrm{u}}\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial y}\right)\bar{\mathrm{j}}+\left(\bar{\mathrm{u}}\frac{\partial\bar{\mathrm{u}}}{\partial z}\right)\bar{\mathrm{k}}\right]=T_1.\right.$$

Mivel $\mathrm{u}=\mathrm{grad}\,\varphi$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\bar{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{1}{n}(\bar{\mathbf{u}}\nabla)\bar{\mathrm{u}}=T_2.$$

Figyelembe véve azt, hogy

$$\mathrm{grad}\,\frac{|u|^2}{2}=(\bar{\mathbf{u}}\nabla)\bar{\mathrm{u}}+[\bar{\mathrm{u}}x\,\mathrm{rot}\bar{\mathrm{u}}]=(\bar{\mathrm{u}}\nabla)\bar{\mathrm{u}},$$

(mert $\mathrm{rot}\,\mathrm{u}=\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi=0$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathrm{n}\frac{\mathrm{d}\bar{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}s}\right)=\frac{1}{2\mathrm{n}}\mathrm{grad}|\mathrm{grad}\,\varphi|^2=\frac{1}{2n}\mathrm{grad}\,\mathrm{n}^2.$$

A sugárpálya differenciálegyenlete

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathrm{n}\frac{\mathrm{d}\bar{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}s}\right)=\mathrm{grad}\,n \qquad 5.31$$

Be fogjuk látni, hogy ebben a differenciálegyenletben eddigi két speciális eset is megtalálható.

a) Ha a közeg homogén akkor grad n=0 és

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}=0.$$

Ennek megoldása

$\bar{r}=\bar{a}\, s+\bar{b}$,

ahol

$\bar{a}$ és $\bar{b}$

állandó vektorok. Egy-egy egyenes egyenlete.

b) Ha a közeg törésmutató szempontjából gömbi rétegződésű, azaz a törésmutató csak egy fix ponttól való távolságtól függ, akkor

$n=n(r)$ 5.32

Ez a földi atmoszféra esete.
Vizsgáljuk meg az

$\bar{r}\, x\, n\, \bar{t}$,

vektor változását a sugárpálya mentén.

Itt $\bar{r}=r$

$$\frac{d}{ds}[\bar{r} x n \bar{t}]=\left[\frac{d\bar{r}}{ds} x\, n\bar{t}\right]\left[\bar{r}\, x \frac{d}{ds}(n\bar{t})\right].$$

Az első tagban

$\frac{d\bar{r}}{ds}=\bar{t}$ egységvektor.

A második tagban

$$\frac{d}{ds}(n\bar{t})=\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\bar{r}}{ds}\right)=\text{grad}\, n.$$

Az 5.32 figyelembe vételével kapjuk, hogy

$$\text{grad}\, n=\frac{\bar{r}}{r}\frac{dn}{dr}.$$

A második tag szintén zérus

$$\left[r\, x \frac{d}{ds}(n\bar{t})\right]=\left[\bar{r}\, x \frac{\bar{r}}{r}\frac{dn}{dr}\right]=0.$$

Ennek megfelelően

$[\bar{r}\, x\, n\, \bar{t}]=\text{const}.$

Ha mindkét oldalnak vesszük az abszolút értékét akkor már a jól ismert összefüggést kapjuk

$n\, r \sin\alpha=n\, r\cos\delta=C.$

IRODALOM

[1] *Istvánffy Edwin:* Mikrohullámok technikája és rádiólokátorok. Tankönyvkiadó, 1957.
[2] *Czigány Sebestyén, dr. Udo Kühn und Horst Reissmann:* Über einige Erfahrungen bei der Planung und beim Betrieb von Richtfunkstrecken. Technische Mitteilungen des RFZ 20. Jahrgang Heft 1/1976.
[3] *Csernoch János:* A földfelület hatása az elektromágneses hullámok terjedésére. ORION—BHG—TRT Műszaki Közlemények, XXIV. évf. 1978. 3. sz.
[4] *Max Born, Emil Wolf:* Principles of Optics. Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light. Fourth Edition. Pergamon Press.
[5] *Simonyi Károly:* Elméleti Villamosságtan. Egyetemi tankönyv. Tankönyvkiadó, 1965.
[6] *Dr. Fenyő István—dr. Frey Tamás:* Matematika villamosmérnököknek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1964.
[7] *Dr. Csurgay Árpád—Markó Szilárd:* Mikrohullámú passzív hálózatok. Tankönyvkiadó, 1965.