A végeselemek módszerének alkalmazása elektromechanikai peremérték feladatok megoldására

DR. NAGY JÁNOS
KKVMF Híradásipari Intézet

A gyakorlatban előforduló peremérték feladatok műszaki célokat szolgáló közelítő megoldására a numerikus módszerek alkalmazhatók. A módszerek eredményességét számítástechnikai megvalósításuk révén lehet értékelni. A dolgozatban a végeselemek módszerét alkalmazzuk piezoelektromos anyagok peremérték feladatainak numerikus közelítő megoldására.

A végeselemek módszere

A végeselemek módszere matematikailag a variációs funkcionál extrémizálására alkalmazott Ritz-módszer továbbfejlesztése [1]. A Ritz-módszer a megoldást a teljes vizsgált tartományon értelmezett és az előírt peremfeltételeket kielégítő próbafüggvények súlyozott összegeként keresi. A módszer legnagyobb hátránya gyakorlati szempontból az, hogy csak nagyon kevés, geometriailag szabályos peremfeltétel kielégítésére alkalmas. Ezt a hátrányt küszöböli ki a végeselemek módszere, amely a megoldást a vizsgált tartomány résztartományain — ún. végeselemein — értelmezett próbafüggvények súlyozott összegeként állítja elő. Mindkét módszer alapvető sajátossága, hogy alkalmazásához egy adott tartományra érvényes integrális összefüggés szükséges. Ezen integrális összefüggés előállítására számos módszer áll rendelkezésre [2]. A végeselemek módszerének piezoelektromos anyagokra való alkalmazásakor — a későbbiekben részletezett módon — az energia funkcionál közvetlen felírását használtuk. Valamely peremérték feladat végeselemek módszerével történő megoldásának alapfeltételét J. T. Oden fogalmazta meg igen szellemesen és célratörően a következő módon [1]: „all that is needed is some means to translate a relation that holds at a point (in the solution domain) into one that must hold over a finite region". A villamosságtanban a pontonként, ill. résztartományonként értelmezett alapösszefüggések a Maxwell egyenletek differenciális ill. integrális alakjai. (A problémák tényleges megoldására használt összefüggések az ismert parciális differenciálegyenletek, ill. integrálegyenletek [3], [4].)

A próbafüggvények megválasztása

A végeselemek módszerében alkalmazott próbafüggvények véges tartományon alkalmazott interpolációs függvények. Ezek, feladatuknál fogva, a tartomány peremén meghatározott számú pontban előírt értékből meghatározzák a tartomány belsejében felvett értékeket. Kiválasztásuk meghatározza a vizsgált problémához a végeselemre érvényes alapösszefüggést, melyet elemkarakterisztikának nevezünk. A végeselemek módszerénél alkalmazott próbafüggvényeket még interpolációs és alakfüggvényeknek is szokták nevezni. Az utóbbi elnevezést az itt nem ismertetett, de a számítástechnikai megoldásban alkalmazott izoparametrikus leképezési elv indokolja.

Számításainkhoz a négyzet alakú végeselem négy sarokpontjának értékével adott interpolációs függvényét alkalmaztuk [2]:

$$\Phi^{(e)}(x, y) = \sum_{i=1}^{4} N_i \Phi_i. \tag{1}$$

$$N_i = \frac{1+x_i x}{2} \cdot \frac{1+y_i y}{2}, \tag{2}$$

ahol:

$\Phi^{(e)}$ az interpolációs függvény,
N_i az i-edik sarokponthoz tartozó alakfüggvény,
$x_{1,2,3,4} = -1, -1, 1, 1,$
$y_{1,2,3,4} = -1, 1, 1, -1.$

Amint (2)-ből látható, az egyes sarokpontokhoz tartozó alakfüggvények az adott sarokpontokban 1, a többi sarokpontban zérus értéket vesznek fel. Mivel az alakfüggvények a végeselem élei mentén csak az adott él végpontjaitól függenek, a résztartományonkénti közelítés folytonos.

Az energia funkcionál közvetlen előállítása

Piezoelektromos anyagokra a következő alapösszefüggés érvényes

$$\begin{aligned} \overline{T} &= \overline{\overline{C}}^{(E)} \cdot \overline{S} - \overline{\overline{e}}\overline{E}, \\ \overline{D} &= \overline{\overline{e}} \cdot \overline{S} + \overline{\overline{\varepsilon}}^{(S)} \overline{E}, \end{aligned} \tag{3}$$

ahol:

$\overline{T}$ a mechanikai feszültség komponensei,
$\overline{S}$ a mechanikai deformáció komponensei,
$\overline{E}$ az elektromos mezőintenzitás komponensei,
$\overline{D}$ az elektromos indukció komponensei.

Két dimenzióban az anyagállandók 5×5 dimenziójú mátrix alakban írhatók.

Előadásként elhangzott a KKVMF VII. tudományos ülésszakán

Kvázisztatikus esetben az (1)-ben adott alakfüggvényt három szabadsági fokra alkalmazzuk: az x és y irányú elmozdulásra, amelyekből a deformáció komponensei számíthatók, valamint a skalár potenciálra, amelyből az elektromos mezőintenzitás számítható. A végeselemben tárolt energia a következő

$$W^{(e)} = \int\int [\overline{S}^{\mathrm{T}} \quad \overline{E}^{\mathrm{T}}] \begin{bmatrix} \overline{\overline{\mathrm{C}}}^{(\mathrm{E})} & -\overline{\overline{\mathrm{e}}} \\ \overline{\overline{\mathrm{e}}} & \overline{\overline{\varepsilon}}^{(\mathrm{S})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{S} \\ \overline{E} \end{bmatrix} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{4}$$

Az energia (4)-ben adott kifejezésébe S és E (1) által meghatározott közelítését helyettesítve az energia funkcionált kapjuk, amelynek a végeselem sarokpontokban felvett értékei szerinti parciális deriváltjai az elemkarakterisztikát adják. Az elemkarakterisztikák rendszeregyenletté szervezését az ismert alapmódszerrel [2] végeztük.

A számítástechnikai megvalósítás főbb jellemzői

A numerikus eljárás három szakaszból áll. Az első szakasz az adatbevitel, amelyben a koordinátákon kívül a háló topológia tulajdonságai, az ebből adódó rendszermátrix kitöltöttség, végül a peremértékek előírása szerepel. A második szakasz az elemkarakterisztikák előállítását és a rendszermátrix kitöltését végzi. A harmadik szakasz a rendszeregyenlet adott feladatra való megoldását hajtja végre. A három szakasz megfelel a végeselem módszer alkalmazására készült programok célszerű szervezésének. A program tényleges kipróbálása ABC 80 mikroszámítógépen történt, így a három szakaszra bontást a rendelkezésre álló belső tér kapacitása is szükségessé tette.

Összefoglalás

A végeselemek módszerét alkalmaztuk piezoelektromos anyagra előírt peremérték feladat megoldására. Az elemkarakterisztikát az (1) és (2) szerinti interpolációs függvényre vonatkozó energia funkcionál extremizálásából nyertük. A numerikus számításokat ABC 80 számítógépen végeztük.

IRODALOM

[1] *Kenneth H. Huebner:* The Finite Element Method for Engineers. John Wiley and Sons 1975.

[2] *O. C. Zienkiewicz:* The Finite Element Method. McGraw-Hill 1977.

[3] *Zombory László—Koltai Mihály:* Elektromágneses terek gépi analízise. Műszaki Könyvkiadó 1979.

[4] *M. V. Chari, P. P. Silvester:* Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems. John Wiley and Sons 1980.